

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования



**Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет**

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по образовательной  
деятельности

 И.Ю.Черникова

« 14 » июля 20 25 г.

### **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Дисциплина:** Теория пластичности и ползучести  
(наименование)

**Форма обучения:** очная  
(очная/очно-заочная/заочная)

**Уровень высшего образования:** бакалавриат  
(бакалавриат/специалитет/магистратура)

**Общая трудоёмкость:** 180 (5)  
(часы (ЗЕ))

**Направление подготовки:** 15.03.03 Прикладная механика  
(код и наименование направления)

**Направленность:** Прикладная механика (общий профиль, СУОС)  
(наименование образовательной программы)

## 1. Общие положения

### 1.1. Цели и задачи дисциплины

Целью курса является формирование компетенций о предмете, моделях, постановках и методах решения основных задач теории пластичности и ползучести.

Задачами дисциплины являются:

- формирование знаний об истории развития и современном состоянии реологических моделей механики деформируемого твердого тела, описывающих неупругое поведение материалов и о постановках и методах решения задач теории пластичности и ползучести;
- приобретение умений и навыков выбора определяющих уравнений, постановки и решения задач теории пластичности и ползучести в зависимости от особенностей описываемых процессов.

### 1.2. Изучаемые объекты дисциплины

Деформируемые среды, испытывающие неупругое поведение, и отвечающие им реологические модели, уравнения равновесия и динамики для подобных сред, задачи в рамках теории пластичности и ползучести и методы их решения.

### 1.3. Входные требования

Не предусмотрены

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индекс индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (знать, уметь, владеть)	Индикатор достижения компетенции, с которым соотнесены планируемые результаты обучения	Средства оценки
ПК-1.1	ИД-1ПК-1.1	Знает гипотезы и уравнения теории пластического течения, а также основные задачи теории пластичности и подходы к их решению	Знает основные разделы математики, механики деформируемых тел, теории колебаний; современные методы проведения расчетов напряженно-деформированного состояния конструкций, численные методы моделирования, включая метод конечных элементов;	Коллоквиум

Компетенция	Индекс индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (знать, уметь, владеть)	Индикатор достижения компетенции, с которым соотнесены планируемые результаты обучения	Средства оценки
ПК-1.1	ИД-2ПК-1.1	Умеет выбирать подходящие модели пластичности и ползучести для решения прикладных задач	Умеет применять специальные методики расчета параметров нагружения; применять специальные методики расчета конструкций на прочность, устойчивость и жесткость; применять современные системы автоматизированного проектирования (САПР), в том числе: пакеты прикладных программ конечно-элементного анализа, пакеты программ для создания электронных геометрических моделей; читать проектную конструкторскую и нормативную документацию	Дифференцированный зачет
ПК-1.1	ИД-3ПК-1.1	Владеет навыками использования пакетов прикладных математических вычислений и компьютерной алгебры для преобразования уравнений и решения простейших задач теории пластичности	Владеет навыками разработки статических и динамических моделей; применения современных методов, средств и стандартов, прикладных комплексов программ используемых при проектировании.	Индивидуальное задание

### 3. Объем и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Распределение по семестрам в часах	
		Номер семестра	
		7	
1. Проведение учебных занятий (включая проведение текущего контроля успеваемости) в форме:	72	72	
1.1. Контактная аудиторная работа, из них:			
- лекции (Л)	32	32	
- лабораторные работы (ЛР)			
- практические занятия, семинары и (или) другие виды занятий семинарского типа (ПЗ)	36	36	
- контроль самостоятельной работы (КСР)	4	4	
- контрольная работа			
1.2. Самостоятельная работа студентов (СРС)	108	108	
2. Промежуточная аттестация			
Экзамен			
Дифференцированный зачет	9	9	
Зачет			
Курсовой проект (КП)			
Курсовая работа (КР)			
Общая трудоемкость дисциплины	180	180	

### 4. Содержание дисциплины

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	
7-й семестр				

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
Теория пластического течения	14	0	18	54
1. История теории пластичности. Определение пластического материала. Основные гипотезы теории пластичности. 2. Условие текучести. Интенсивность напряжений. Теория течения. Ассоциированный закон течения. Идеально пластический материал. Интенсивность скоростей деформаций. 3. Принцип образца и стандартные виды испытаний пластических материалов. Главные значения и оси тензора напряжений и их поведение в стандартных испытаниях. 4. Пространство главных напряжений и его тензорный базис. Девиаторная плоскость и шаровая ось. Инварианты тензора напряжений. Вид напряженного состояния, угол вида и параметр Лоде. Поверхность текучести изотропного материала в пространстве главных напряжений. 5. Пластически анизотропные материалы: функции текучести, пределы текучести и параметры анизотропии. Аномальные эффекты, наблюдаемые для пластически анизотропных материалов. 6. Функции текучести Хилла и Барлата. Идентификация параметров функции текучести пластически анизотропного материала по данным эксперимента. 7. Деформационное упрочнение. Соотношения закона пластического течения с изотропным упрочнением. Работа пластических деформаций. 8. Знакопеременное нагружение. Эффект Баушингера. Остаточные напряжения и деформации при знакопеременном нагружении. Кинематическое упрочнение. Соотношения закона пластического течения с кинематическим упрочнением.				
Плоские задачи теории идеальной пластичности	6	0	6	18
9. Плоские задачи идеальной теории пластичности. Уравнения на характеристиках. Теоремы Генки. Разрешимость начальных и краевых задач. Кинематические соотношения на характеристиках. 10. Вариационные принципы теории пластичности				
Пластичность при сложном и динамическом нагружении	8	0	8	18
11. Установившееся пластическое поведение при повторяющемся нагружении. Приспособляемость и рэтчетинг. 12. Упруго-пластические волны.				
Структурные реологические модели	4	0	4	18
12. Структурные модели реологических сред.				

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
ИТОГО по 7-му семестру	32	0	36	108
ИТОГО по дисциплине	32	0	36	108

### Тематика примерных практических занятий

№ п.п.	Наименование темы практического (семинарского) занятия
1	Приобретение знаний об основных понятиях теории
2	Критерии Треска и Мизеса. Их поверхности при двухосном напряжённом состоянии и при комбинации одноосной нагрузки и кручения.
3	Скорости пластических деформаций при ПНС, ПДС, двухосном нагружении.
4	Развитие пластических деформаций при ПДС, квазистатическая задача.
5	Двухпараметрические критерии текучести и их идентификация.
6	Анизотропные критерии текучести. Критерий Хилла.
7	Изотропное деформационное упрочнение.
8	Зависимость пластических деформаций от пути нагружения. Задача об одновременном кручении и растяжении трубы по различным траекториям нагружения.
9	Кинематическое деформационное упрочнение, приспособляемость.
10	Моделирование ретчинга трубы под воздействием постоянного растягивающего усилия вдоль оси и циклического кручения.
11	Линии скольжения в ПДС. Задача о критическом усилии растяжения полосы с вырезами. Задача об изгибе полосы с вырезом
12	Теоремы пластичности. Задача о критическом усилии растяжения полосы с несимметричными вырезами.
13	Одномерная задача о распространении упруго-пластических волн в стержне.
14	Реологические модели среды. Модели Максвелла и Фойгта. Деформации возникающие в ответ на приложенную историю нагружения. Напряжения возникающие в ответ на приложенную историю деформаций.
15	Трехэлементные реологические модели. Деформации возникающие в ответ на приложенную историю нагружения. Напряжения возникающие в ответ на приложенную историю деформаций.

## 5. Организационно-педагогические условия

### 5.1. Образовательные технологии, используемые для формирования компетенций

Проведение лекционных занятий по дисциплине основывается на активном методе обучения, при котором учащиеся не пассивные слушатели, а активные участники занятия, отвечающие на вопросы преподавателя. Вопросы преподавателя нацелены на активизацию процессов усвоения материала, а также на развитие логического мышления. Преподаватель заранее намечает список вопросов, стимулирующих ассоциативное мышление и установление связей с ранее освоенным материалом.

Практические занятия проводятся на основе реализации метода обучения действием: определяются проблемные области, формируются группы. При проведении практических занятий преследуются следующие цели: применение знаний отдельных дисциплин и креативных методов для решения проблем и принятия решений; отработка у обучающихся навыков командной работы, межличностных коммуникаций и развитие лидерских качеств; закрепление основ теоретических знаний.

Проведение лабораторных занятий основывается на интерактивном методе обучения, при котором обучающиеся взаимодействуют не только с преподавателем, но и друг с другом. При этом доминирует активность учащихся в процессе обучения. Место преподавателя в интерактивных занятиях сводится к направлению деятельности обучающихся на достижение целей занятия.

При проведении учебных занятий используются интерактивные лекции, групповые дискуссии, ролевые игры, тренинги и анализ ситуаций и имитационных моделей.

### 5.2. Методические указания для обучающихся по изучению дисциплины

При изучении дисциплины обучающимся целесообразно выполнять следующие рекомендации:

1. Изучение учебной дисциплины должно вестись систематически.
2. После изучения какого-либо раздела по учебнику или конспектным материалам рекомендуется по памяти воспроизвести основные термины, определения, понятия раздела.
3. Особое внимание следует уделить выполнению отчетов по практическим занятиям, лабораторным работам и индивидуальным комплексным заданиям на самостоятельную работу.
4. Вся тематика вопросов, изучаемых самостоятельно, задается на лекциях преподавателем. Им же даются источники (в первую очередь вновь изданные в периодической научной литературе) для более детального понимания вопросов, озвученных на лекции.

## 6. Перечень учебно-методического и информационного обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

### 6.1. Печатная учебно-методическая литература

№ п/п	Библиографическое описание (автор, заглавие, вид издания, место, издательство, год издания, количество страниц)	Количество экземпляров в библиотеке
<b>1. Основная литература</b>		
1	Качанов Л. М. Основы теории пластичности : учебное пособие для университетов. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Наука, 1969. 420 с.	54
<b>2. Дополнительная литература</b>		
<b>2.1. Учебные и научные издания</b>		

1	Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности : учебник для вузов. М. : Физматлит, 2002. 415 с.	54
2	Москвитин В. В. Циклические нагружения элементов конструкций. Москва : Наука : Физматлит, 1981. 344 с.	2
<b>2.2. Периодические издания</b>		
1	Вестник ПНИПУ. Механика : журнал. Пермь : Изд-во ПНИПУ, 2012 - .	
2	Вычислительная механика сплошных сред : журнал. Пермь : ИМСС УрО РАН, 2008 - .	
3	Известия Российской академии наук. Механика твердого тела : научный журнал. Москва : Наука, 1966 - .	
<b>2.3. Нормативно-технические издания</b>		
	Не используется	
<b>3. Методические указания для студентов по освоению дисциплины</b>		
	Не используется	
<b>4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента</b>		
	Не используется	

## 6.2. Электронная учебно-методическая литература

Вид литературы	Наименование разработки	Ссылка на информационный ресурс	Доступность (сеть Интернет / локальная сеть; авторизованный / свободный доступ)
Дополнительная литература	Москвитин В. В. Циклические нагружения элементов конструкций. Москва : Наука : Физматлит, 1981. URL: <a href="https://elibr.pstu.ru/Record/RUPNRP">https://elibr.pstu.ru/Record/RUPNRP</a> Uelib2624 (дата обращения: 21.11.2021).	<a href="https://elibr.pstu.ru/Record/RUPNRP">https://elibr.pstu.ru/Record/RUPNRP</a> Uelib2624	локальная сеть; авторизованный доступ

## 6.3. Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, используемое при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Вид ПО	Наименование ПО
Операционные системы	MS Windows XP (подп. Azure Dev Tools for Teaching до 27.03.2022 )
Прикладное программное обеспечение общего назначения	Mathematica Professional Version (лиц.L3263-7820*)

## 6.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Наименование	Ссылка на информационный ресурс

Наименование	Ссылка на информационный ресурс
База данных Scopus	<a href="https://www.scopus.com/">https://www.scopus.com/</a>
База данных Web of Science	<a href="http://www.webofscience.com/">http://www.webofscience.com/</a>
Научная библиотека Пермского национального исследовательского политехнического университета	<a href="https://elib.pstu.ru/">https://elib.pstu.ru/</a>
Электронно-библиотечная система Лань	<a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>
Электронно-библиотечная система IPRsmart	<a href="http://www.iprbookshop.ru/">http://www.iprbookshop.ru/</a>
Информационные ресурсы Сети КонсультантПлюс	локальная сеть

## 7. Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине

Вид занятий	Наименование необходимого основного оборудования и технических средств обучения	Количество единиц
Лекция	Мультимедийная учебная аудитория 205 корпус Г: Мультимедийный комплекс (Инв.№ 0483179), доска аудиторная (Инв.№ 0641017), ноутбук Toshiba Satellite A200-1HV (Инв.№ 0474274)	1
Практическое занятие	Мультимедийный компьютерный класс 212 корпус Г: Программно-аппаратный комплекс для организации удаленного доступа к вычислительным ресурсам и ПО QForm высокопроизводительного вычислительного комплекса ПГТУ для реализации образовательных программ по ПНР НИУ (Инв.№ 0485074) в составе: Системный блок Aquarius Elt E50 S67, Intel DQ57TML, Intel Core i7-860, Samsung DDR III SDRAM PC3-10600, HDD 750 Gb SATA-II 300 Western Digital, DVD+/-RW Samsung SH-S223C, PCI-512M ATI Radeon HD5670 GDDR3 VGA+DVI+HDMI, Мышь Aquarius Mouse Optical 2 key Scroll, Клавиатура Aquarius Keyboard 104r/l, Монитор Samsung P2350(KUV) - 11 шт, Проектор Beng Projector BP6210 (Инв.№ 0453251), Киноэкран, Доска аудиторная	1

## 8. Фонд оценочных средств дисциплины

Описан в отдельном документе

## Задачи

Общая информация:

Критерий текучести Мизеса:

$$\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right) + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{23}^2 + 3\sigma_{13}^2} = \sigma_u$$

Критерий текучести Треска-Сен-Венана:

$$\tau_{\max} = \text{Max} \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right\} = \tau_T$$

Критерий текучести Хилла в осях ортотропии  $x, y, z$ :

$$F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1$$

Критерий текучести Хилла при плоском напряженном состоянии (ПНС):

$$(G + H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F + H)\sigma_{yy}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1$$

№1

1. Для двухосного напряженного состояния  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , нарисовать

поверхность текучести в координатах  $\sigma_1, \sigma_2$  для

- а) Критерия текучести Мизеса
  - б) Критерия текучести Треска-Сен-Венана
2. Для напряженного состояния (комбинация одноосного растяжения и

сдвига)  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , нарисовать поверхность текучести в

координатах  $\sigma, \tau$  для

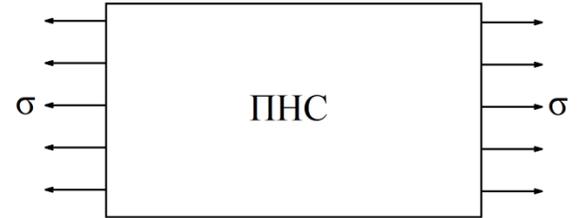
- а) Критерия текучести Мизеса
- б) Критерия текучести Треска-Сен-Венана

№2

1. Дано одноосное напряженное состояние, известно что идёт пластическое течение.

Найти:  $\sigma$ , если

- применять критерий Мизеса, (параметр  $\sigma_u$  считать известным)
- применять критерий Треска-Сен-Венана. (параметр  $\tau_T$  считать известным)

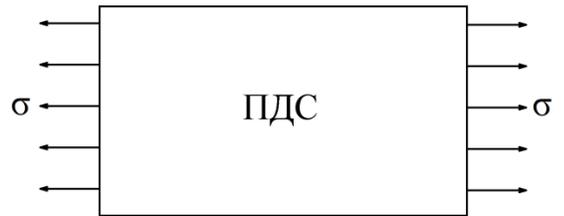


Также, в случае критерия Мизеса, найти скорости пластических деформаций (с точностью до множителя  $\lambda$ )

2. Дано плоско-деформированное состояние, вдоль одной из осей приложено отрицательное напряжение  $\sigma$ , известно что идёт пластическое течение.

Найти:  $\sigma$ , если

- применять критерий Мизеса, (параметр  $\sigma_u$  считать известным)
- применять критерий Треска-Сен-Венана. (параметр  $\tau_T$  считать известным)



Пункты а) и б) выполнить для двух случаев: самого начала пластического течения (соотношения между компонентами тензора напряжений определяются законом Гука) и развитого пластического течения (упругостью пренебрегается).

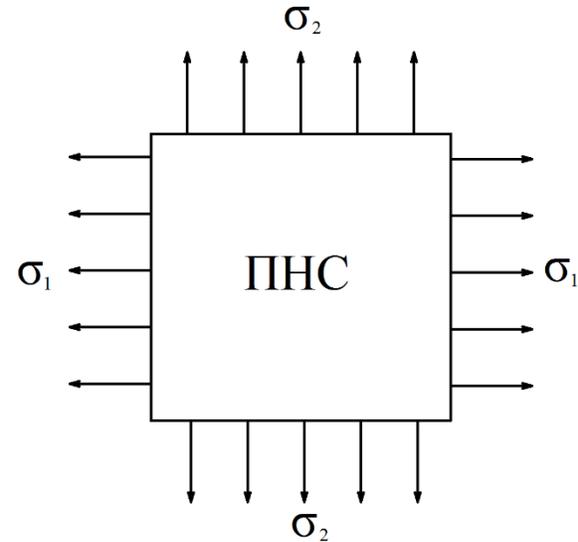
Также, в случае критерия Мизеса и развитого пластического течения, найти скорости пластических деформаций (с точностью до множителя  $\lambda$ )

3. Дано двухосное растяжение пластинки. Известно соотношение между величинами напряжений  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Найти:  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , если

- применять критерий Мизеса, (параметр  $\sigma_u$  считать известным)
- применять критерий Треска-Сен-Венана. (параметр  $\tau_T$  считать известным)

Также, в случае критерия Мизеса, найти скорости пластических деформаций (с точностью до множителя).



### №3

1. Дан критерий текучести (критерий Херши Hershey yield criterion)

$$|\sigma_1 - \sigma_2|^a + |\sigma_2 - \sigma_3|^a + |\sigma_3 - \sigma_1|^a = 2\sigma_u^a$$

Получить выражения для главных скоростей пластических деформаций  $\dot{\epsilon}_i^p$  используя ассоциированный закон пластического течения. А также, определить константу  $a$ , если известно, что при испытании на одноосное растяжение, текучесть наступает при напряжении  $\sigma_u$ , а при испытании на чистый сдвиг (реализованный, например кручением тонкостенной трубы), текучесть наступает при  $\tau_T = 0.546 \sigma_u$ . Нарисовать поверхность текучести в координатах  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  в случае

двухосного напряженного состояния  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

2. Дан критерий текучести (критерий Друкера (или Дракера) Drucker yield criterion)

$$J_2^3 - kJ_3^2 = \left(1 - \frac{4k}{3^6}\right)\sigma_u^6$$

$$J_2 = \frac{3}{2}\mathbf{s}:\mathbf{s}, \quad J_3 = \text{Det}(\mathbf{s})$$

Получить выражения для скоростей пластических деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  используя ассоциированный закон пластического течения. А так же, определить константу  $k$ , если известно, что при испытании на одноосное растяжение, текучесть наступает при напряжении  $\sigma_u$ , а при испытании на чистый сдвиг (реализованный, например кручением тонкостенной трубы), текучесть наступает при  $\tau_T = 0.546\sigma_u$ . Нарисовать поверхность текучести в координатах  $\sigma_1, \sigma_2$  в случае

$$\text{двухосного напряженного состояния } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

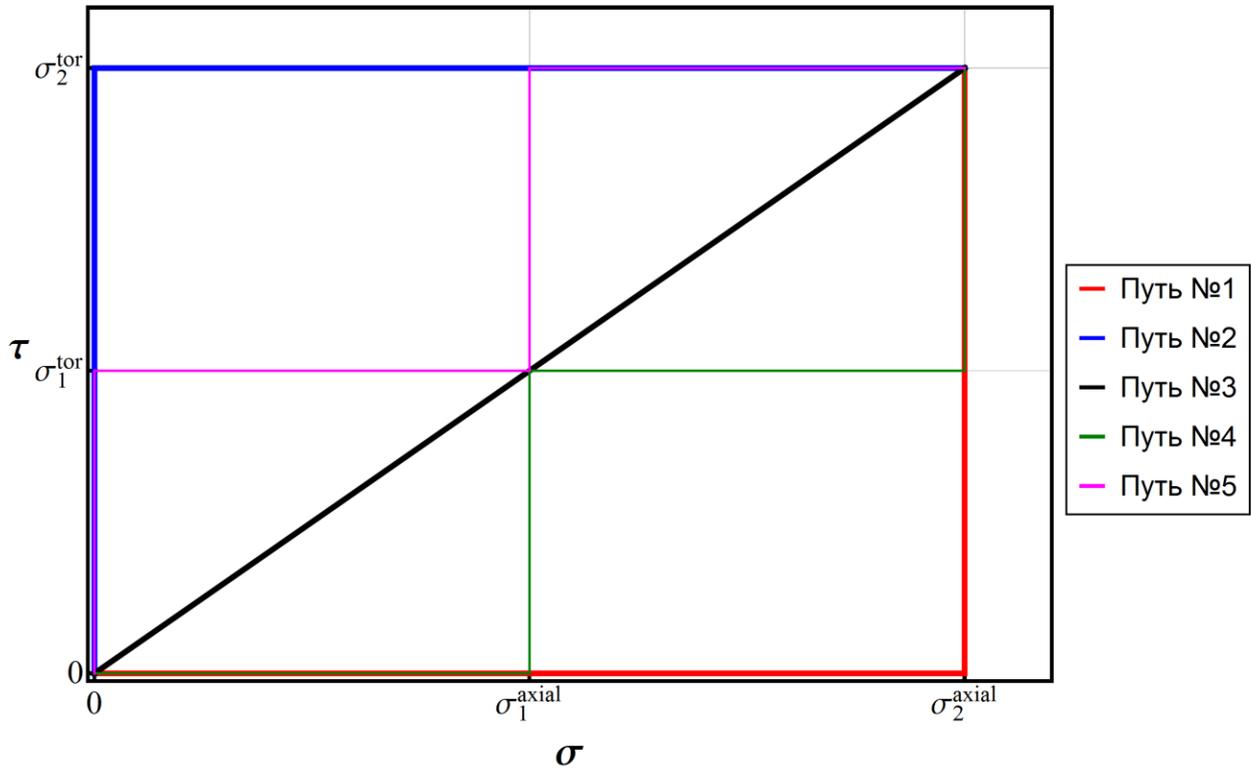
#### №4

Для задачи №2.2 в случае критерия Мизеса рассмотреть динамический случай: найти как будут изменяться напряжения и деформации с развитием пластических деформаций. Материал считать жёстко пластическим  $\sigma_u = 200$  МПа, упругие константы:  $E = 70$  ГПа,  $\nu = 0.34$ . Скорость деформаций вдоль направления приложения усилия считать заданной и равной, например,  $\dot{\varepsilon}_{11} = 0.01$ .

#### №5

Задача об идентификации критерия текучести Хилла по экспериментальным данным. Индивидуальное задание, приложение №1. Сделать отчёт.

#### №6



Производится упругопластическая деформация тонкостенной трубы при нагружении кручением и растяжением вдоль оси. Т.е. компоненты тензора

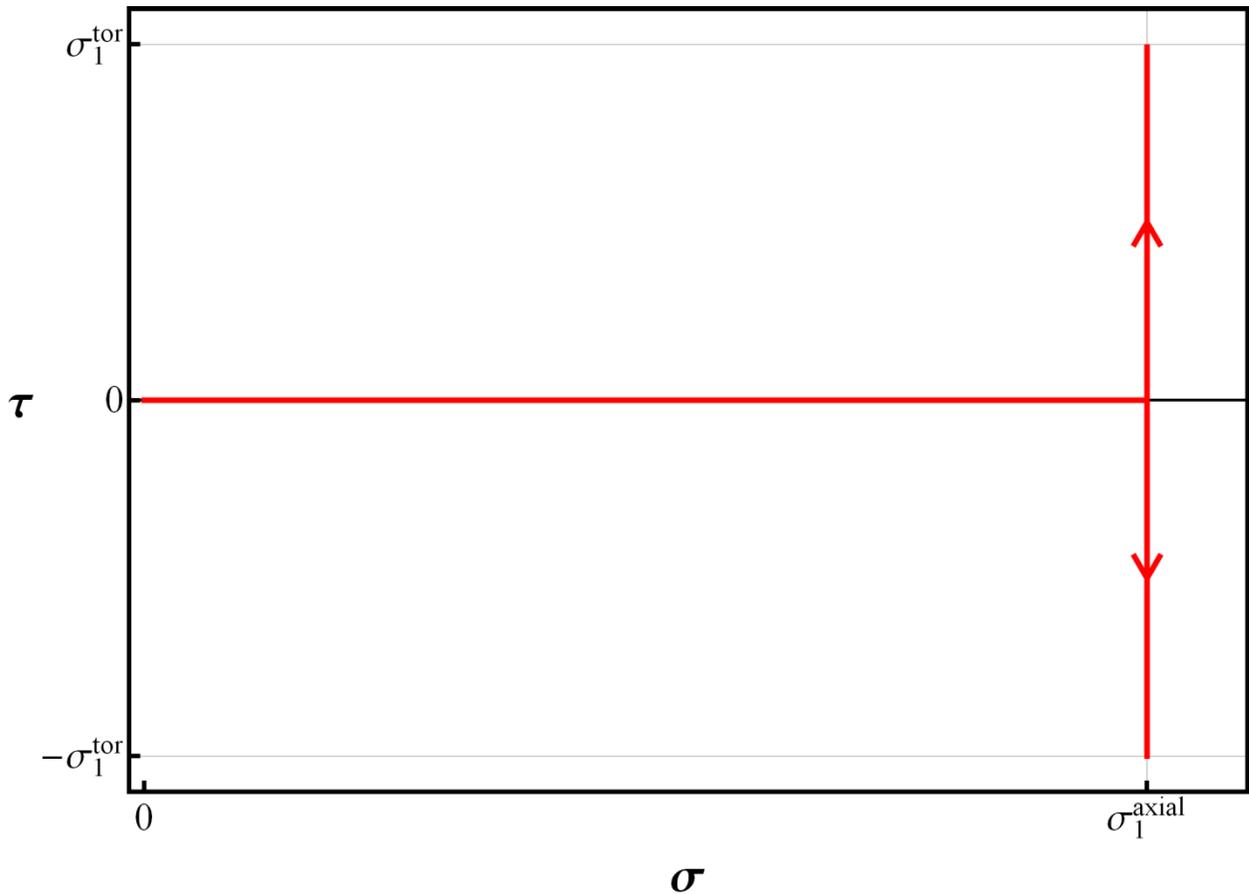
напряжений имеют вид  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma(t) & \tau(t) & 0 \\ \tau(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Даны 5 путей нагружения

$\sigma(t), \tau(t)$  в пространстве напряжений, построить соответствующие им пути в пространстве деформаций. Параметры нагружения:

$\sigma_1^{axial} = 200 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_2^{axial} = 2\sigma_1^{axial}$ ,  $\sigma_1^{tor} = \sigma_1^{axial} / \sqrt{3}$ ,  $\sigma_2^{tor} = 2\sigma_1^{tor}$ . Упругие

константы:  $E = 70 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0.34$ . Критерий текучести Мизеса. Стартовый предел текучести:  $\sigma_u = 200 \text{ МПа}$ , закон упрочнения изотропный:

$$\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} = \sigma_u + k(\varepsilon^p)^n, \quad \dot{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad k = 1500 \text{ МПа}, \quad n = 0.4.$$



Как и в предыдущей задаче, производится деформация тонкостенной трубы. При этом трубу сначала растягивают вдоль оси напряжением  $\sigma_1^{axial} = 200 \text{ МПа}$ , а затем, не изменяя осевой нагрузки, циклически крутят с амплитудой  $\sigma_1^{tor} = \sigma_1^{axial} / \sqrt{3}$ . Упругие константы:  $E = 70 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0.34$ . Пластические свойства материала будем описывать условием текучести Мизеса с кинематическим упрочнением:  $F = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})} = \sigma_u$ , при этом уравнение движения «центра» поверхности текучести выглядит как

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = (\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{n}, \quad \text{где } \mathbf{n} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{\sqrt{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}}$$

есть нормаль к поверхности текучести.

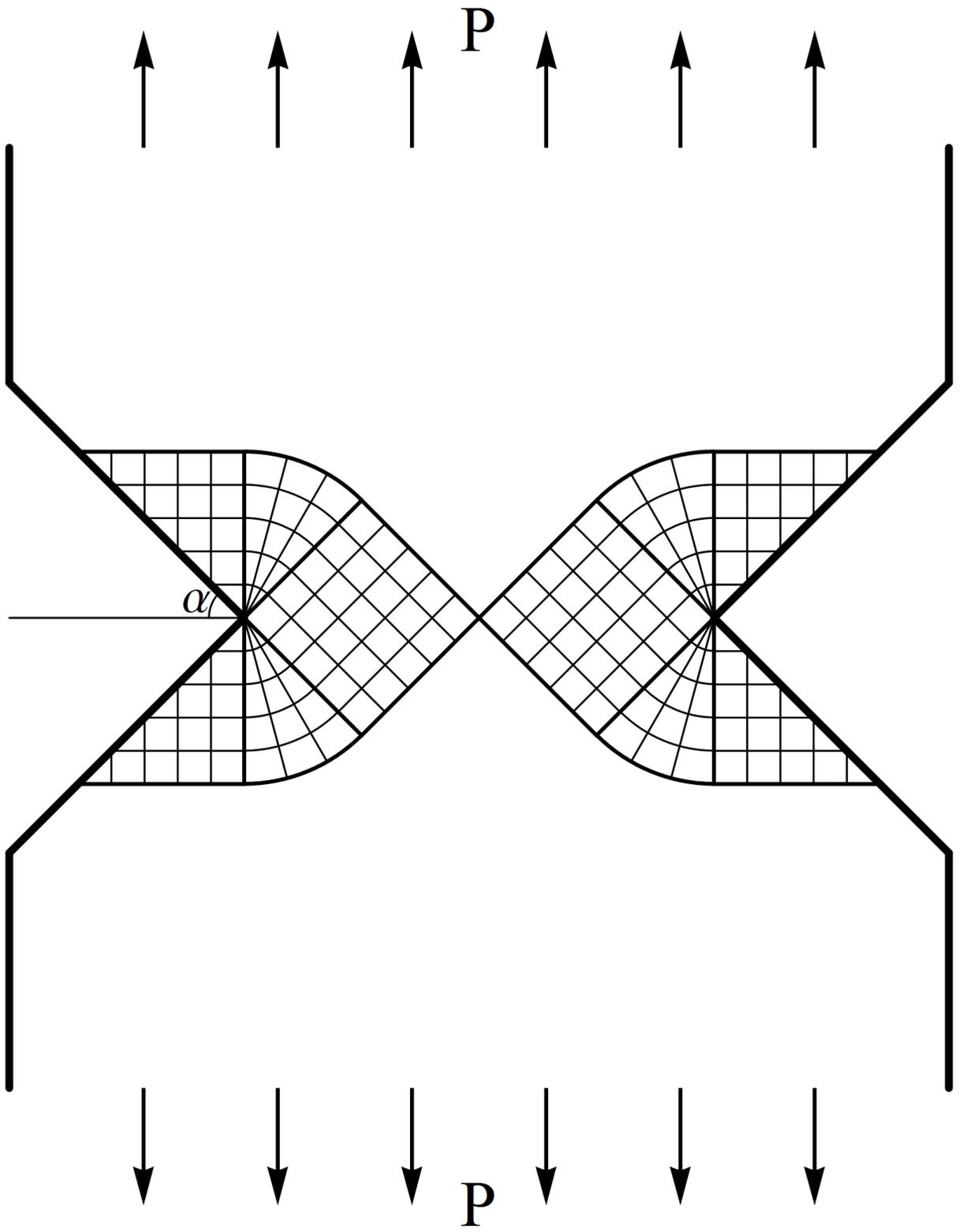
Ассоциированный закон пластического течения будет выглядеть как

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{3}{2} \frac{1}{f'(\varepsilon^p)} (\mathbf{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{n}$ , где  $f(\varepsilon^p)$  это кривая напряжений – пластических деформаций, полученная из эксперимента на одноосное растяжение,  $\varepsilon^p = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^p : \boldsymbol{\varepsilon}^p}$  есть интенсивность пластических деформаций. Здесь будем считать  $f(\varepsilon^p) = \sigma_u + k(\varepsilon^p)^n$ , где  $\sigma_u = 200$  МПа есть стартовый предел текучести и константы  $k = 1500$  МПа,  $n = 0.4$ .

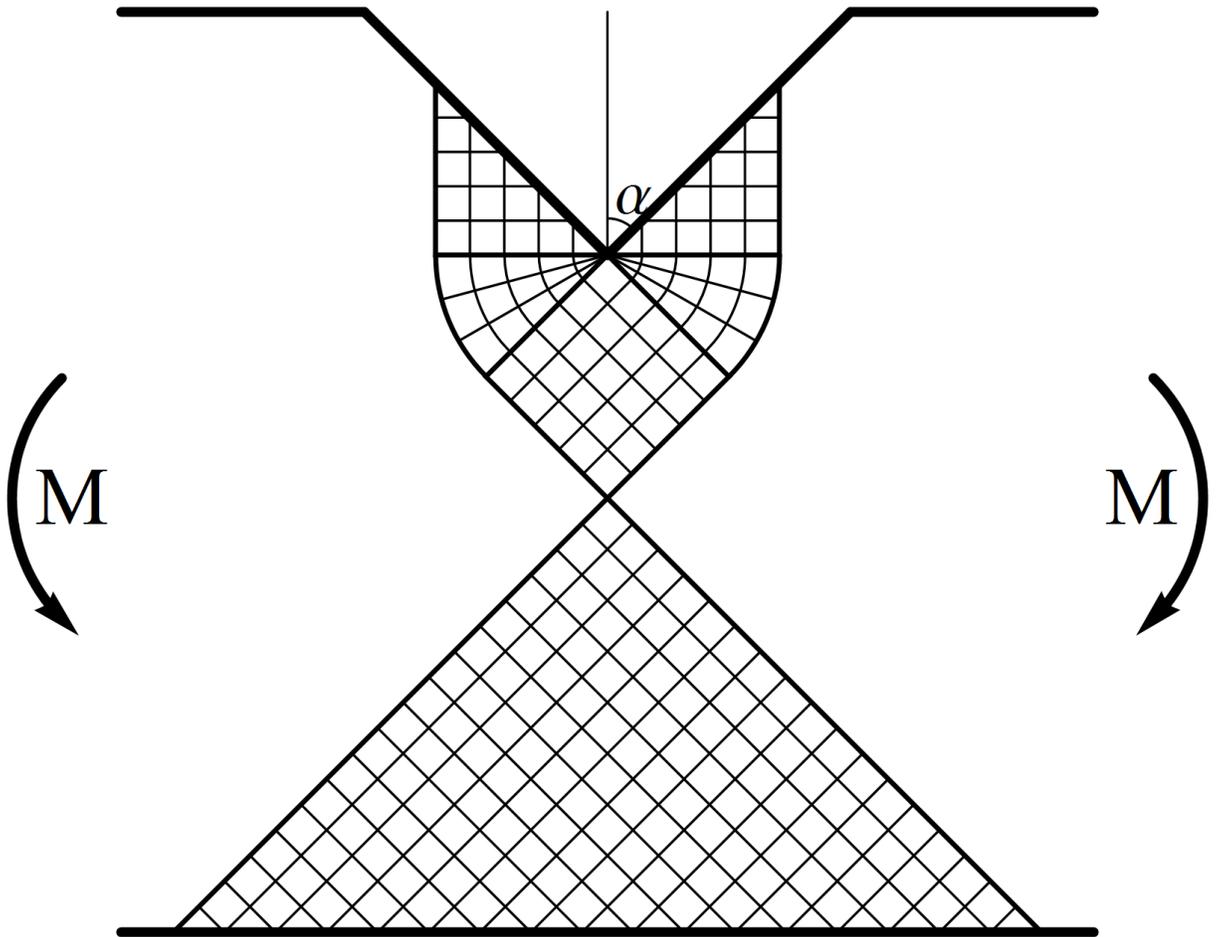
Найти и построить зависимости от времени компонент тензора пластических деформаций и тензора  $\boldsymbol{\alpha}$ , задающего «центр» поверхности текучести.

## №8

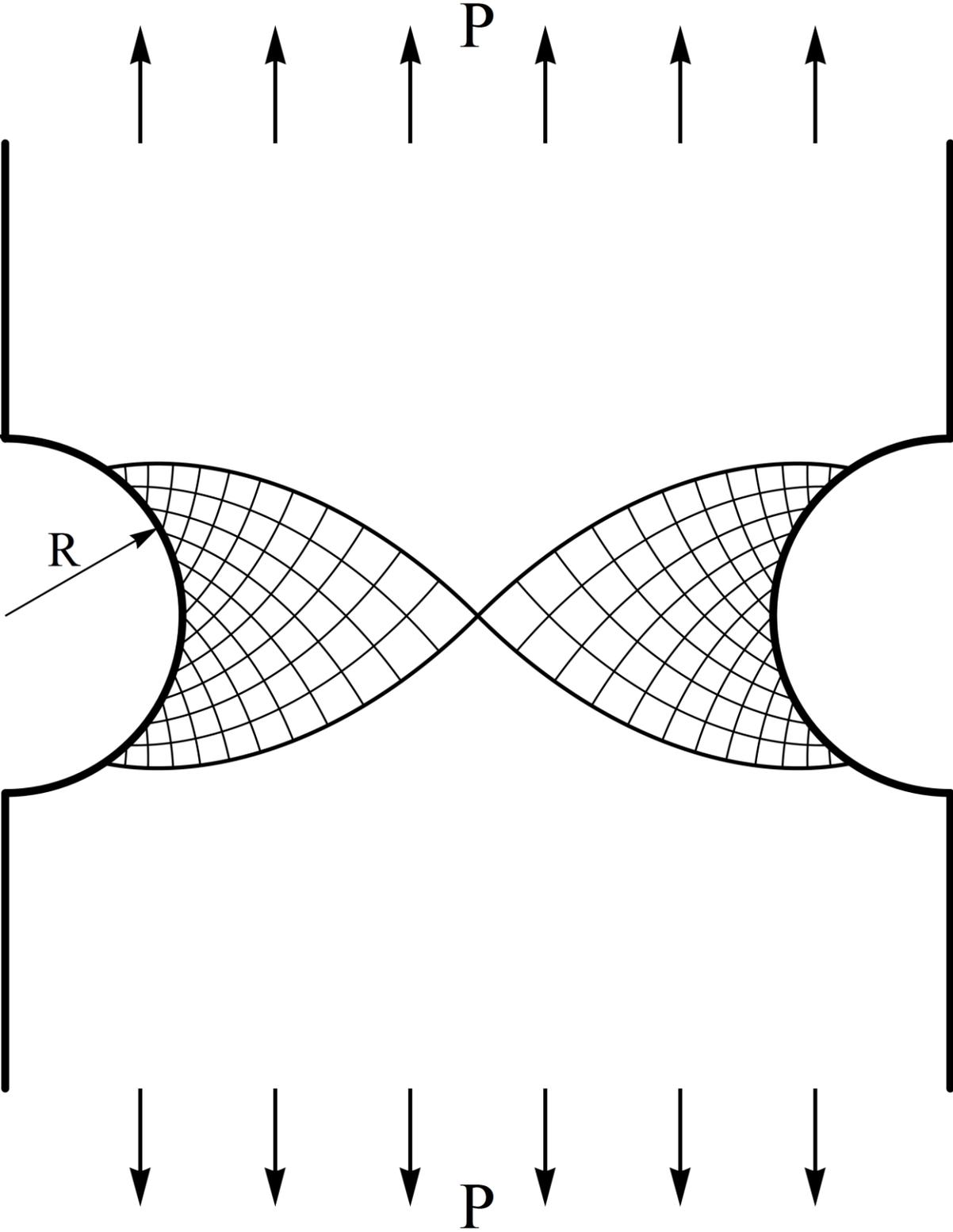
- Задача о критическом усилии  $P$ , необходимом для начала пластического течения при растяжении полосы с угловыми вырезами в условиях плоского деформированного состояния (ПДС). Найти усилие  $P$ , если угол размаха выреза равен  $2\alpha$ , ширина полосы вне выреза равна  $a$ , ширина полосы в самом узком месте выреза равна  $b$ . Материал считать идеально пластическим, подчиняющимся критерию текучести Треска ( $\tau_T$  считать известным), картина линий скольжения приведена на рисунке ниже. Стоит отметить, что критерии текучести Треска и Мизеса совпадают в случае ПДС если пренебрегать упругими деформациями.



2. Задача о критическом моменте  $M$ , необходимом для начала пластического течения при изгибе полосы с вырезом в условиях плоского деформированного состояния(ПДС). Найти момент  $M$ , если угол размаха выреза равен  $2\alpha$ , ширина полосы вне выреза равна  $a$ , ширина полосы в самом узком месте выреза равна  $b$ . Материал считать идеально пластическим, подчиняющимся критерию текучести Треска( $\tau_T$  считать известным), картина линий скольжения приведена на рисунке ниже.



3. То же что и задача 1, только вырезы не угловые а круговые радиуса  $R$ . Линии скольжения имеют форму логарифмических спиралей и задаются уравнениями  $\ln\left(\frac{r}{R}\right) \pm \varphi = const$  в полярных координатах связанных с центром окружности выреза.



№9

Задача на распространение упруго-пластической волны в стержне. Одномерная задача, малые деформации. На левом конце стержня приложена нагрузка  $\sigma^* = -1 \text{ ГПа}$  в течение времени  $\Delta t = 0.01 \text{ с}$ . Необходимо изобразить процесс распространения упруго-пластической волны вглубь стержня, то есть для различных моментов времени изобразить распределения полной, упругой и пластической деформаций в стержне. Кривая напряжений-

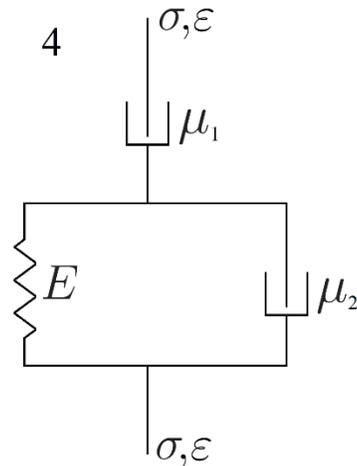
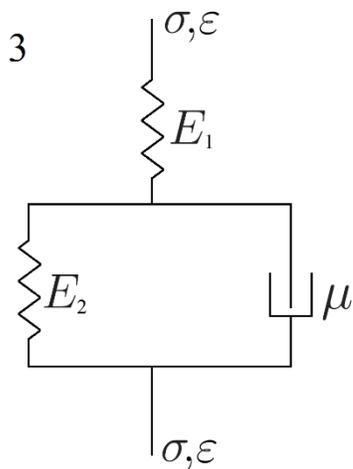
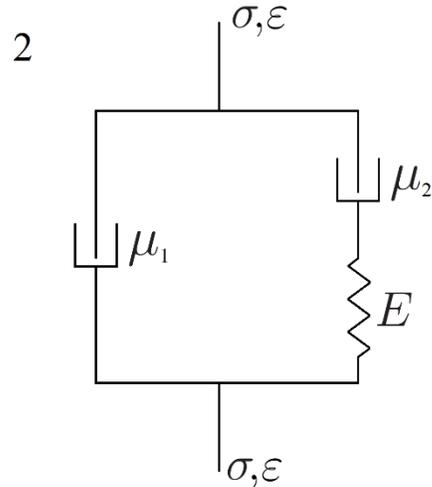
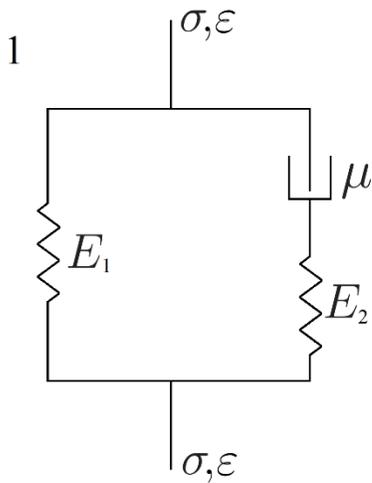
деформаций задаётся выражением 
$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} -k\sqrt{\varepsilon} - c, & \varepsilon < -\sigma_T/E \\ E\varepsilon, & -\sigma_T/E \leq \varepsilon \leq \sigma_T/E \\ k\sqrt{\varepsilon} + c, & \varepsilon > \sigma_T/E \end{cases}, \text{ где}$$

$E = 200 \text{ ГПа}$  - модуль Юнга,  $\sigma_T = 0.5 \text{ ГПа}$  - стартовый предел текучести,  $k = 2\sqrt{E\sigma_T}$ ,  $c = -\sigma_T$ .

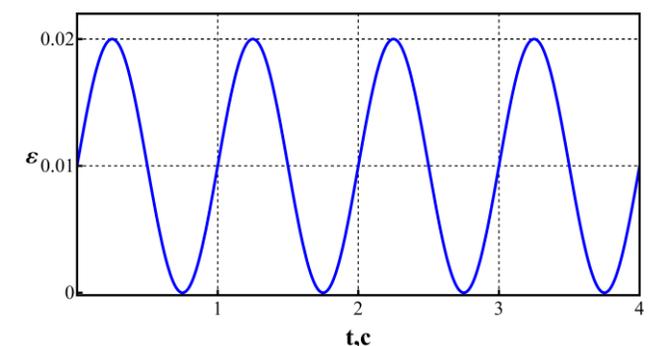
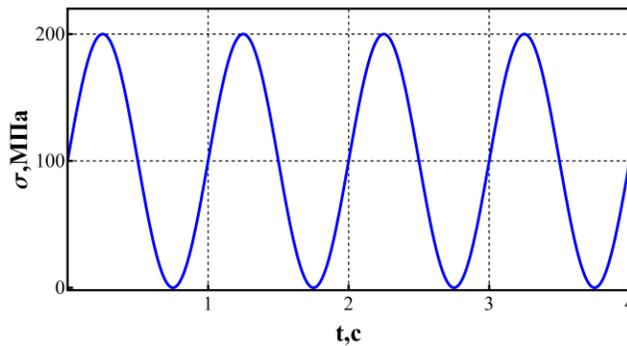
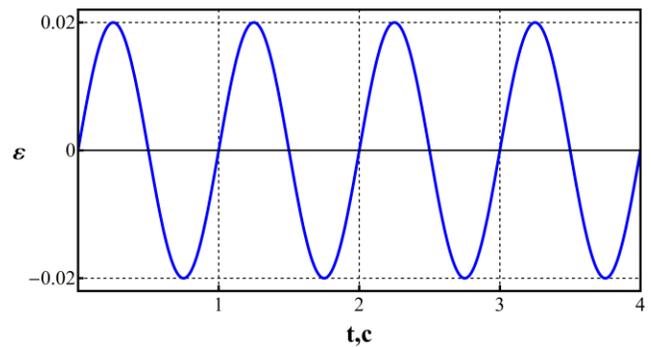
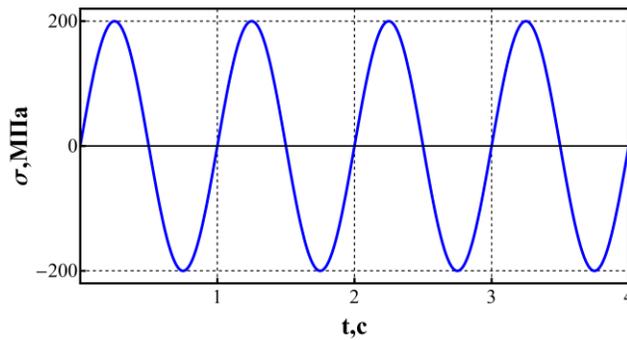
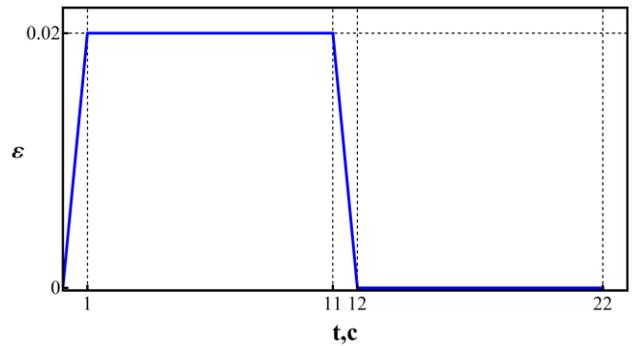
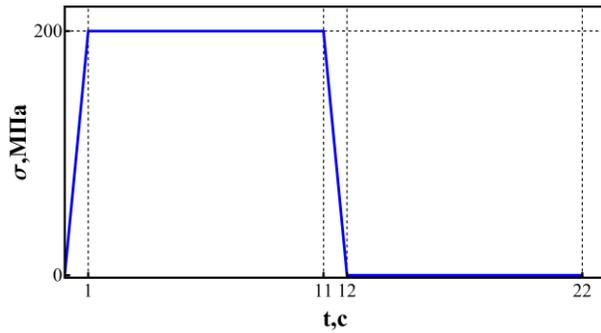
№10

Задание на исследование одномерных 3х-элементных упруго-вязких моделей. Для 4х моделей найти дифференциальные соотношения между напряжениями и деформациями, а затем для конкретных историй историй воздействия приведённых ниже, построить отклик модели (если задана история напряжений то откликом будет зависимость деформации от времени, если задана история изменения деформаций то откликом будет зависимость напряжений от времени). Соотношения между напряжениями упругими деформациями и напряжениями на упругих элементах  $\sigma = E\varepsilon$  и на вязких элементах  $\sigma = \mu\dot{\varepsilon}$ .

Модели:



Истории воздействия:

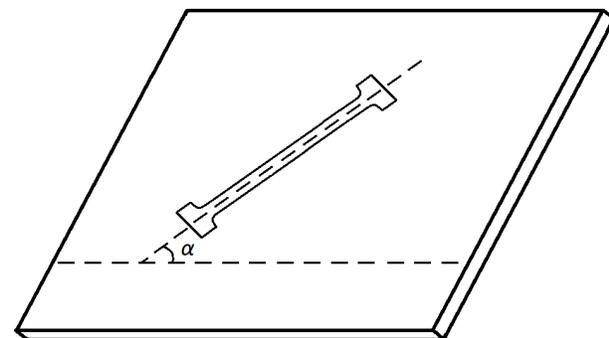


В численных расчётах использовать  $E_1 = 10^4$  МПа,  $E_2 = 1.5 \cdot 10^4$  МПа,  $\mu_1 = 10^4$  МПа  $\cdot$  с,  $\mu_2 = 1.5 \cdot 10^4$  МПа  $\cdot$  с.

## Приложение №1

### Идентификация и проверка анизотропного критерия текучести Хилла №1

Даны результаты экспериментов на одноосное растяжение образцов, вырезанных из листа стали 08кп под различными углами к направлению прокатки. Измерялись 2 параметра:



- 1) отношение деформаций по ширине образца к деформациям по толщине:  $R = \frac{\dot{\epsilon}_{\text{шир}}}{\dot{\epsilon}_{\text{тол}}}$
- 2) предел текучести:  $\sigma_T$ , измеренный в  $\frac{\text{КГС}}{\text{мм}^2} = 10^7 \text{ Па}$ .

параметр \ $\alpha$	$0^\circ$	$22.5^\circ$	$45^\circ$	$67.5^\circ$	$90^\circ$
$R$	1.306	1.033	0.704	1.411	2.122
$\sigma_T \left( \frac{\text{КГС}}{\text{мм}^2} \right)$	20.83	21.48	25.58	23.35	21.80

Критерий текучести Хилла выглядит следующим образом:

$$H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 2N\sigma_{xy}^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 = 1.$$

В плоском напряжённом состоянии:

$$(G + H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F + H)\sigma_{yy}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1.$$

Задачи:

- 1) Используя экспериментальные данные, определить константы  $F, G, H, N$ .
- 2) По известному критерию текучести, найти зависимость  $R, \sigma_T$  от угла  $\alpha$ .
- 3) Сравнить полученные теоретические значения  $R, \sigma_T$  с экспериментальными:
  1. найти отклонения теоретических значений от экспериментальных (в %)
  2. найти максимальное и среднее отклонения
  3. построить графики теоретических  $R, \sigma_T$  от угла и отметить на них экспериментальные точки.
- 4) Сделать выводы.

## Идентификация и проверка анизотропного критерия текучести Хилла №2

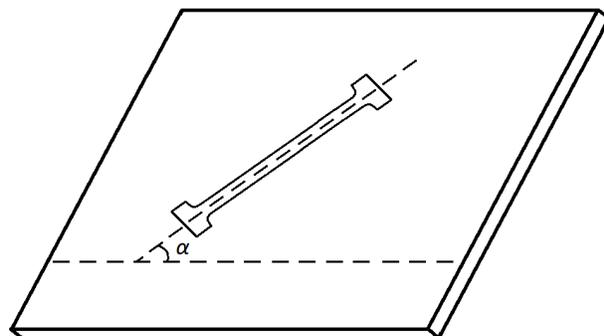
Даны результаты экспериментов на одноосное растяжение образцов, вырезанных из листа стали X18НТ под различными углами к направлению прокатки. Измерялись 2 параметра:

- 1) отношение деформаций по ширине образца к

деформациям по толщине:  $R = \frac{\dot{\epsilon}_{\text{шир}}}{\dot{\epsilon}_{\text{тол}}}$

- 2) предел текучести:  $\sigma_T$ , измеренный в

$$\frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2} = 10^7 \text{ Па} .$$



параметр \ $\alpha$	$0^\circ$	$22.5^\circ$	$45^\circ$	$67.5^\circ$	$90^\circ$
$R$	0.768	0.942	1.153	0.956	0.759
$\sigma_T \left( \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2} \right)$	36.23	34.97	33.61	34.54	36.04

Критерий текучести Хилла выглядит следующим образом:

$$H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 2N\sigma_{xy}^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 = 1.$$

В плоском напряжённом состоянии:

$$(G + H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F + H)\sigma_{yy}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1.$$

Задачи:

- 1) Используя экспериментальные данные, определить константы  $F, G, H, N$ .
- 2) По известному критерию текучести, найти зависимость  $R, \sigma_T$  от угла  $\alpha$ .
- 3) Сравнить полученные теоретические значения  $R, \sigma_T$  с экспериментальными:
  1. найти отклонения теоретических значений от экспериментальных (в %)
  2. найти максимальное и среднее отклонения
  3. построить графики теоретических  $R, \sigma_T$  от угла и отметить на них экспериментальные точки.
- 4) Сделать выводы.

## Идентификация и проверка анизотропного критерия текучести Хилла №3

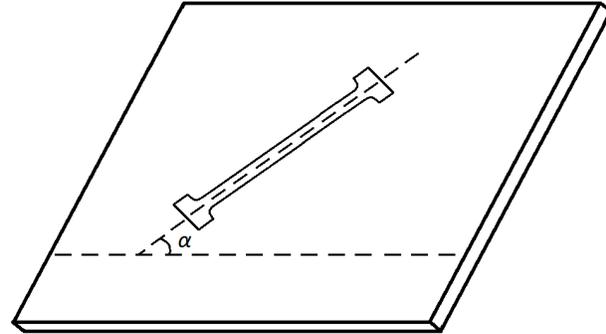
Даны результаты экспериментов на одноосное растяжение образцов, вырезанных из листа алюминиевого сплава АМцАМ под различными углами к направлению прокатки. Измерялись 2 параметра:

- 1) отношение деформаций по ширине образца к

$$\text{деформациям по толщине: } R = \frac{\dot{\epsilon}_{\text{шир}}}{\dot{\epsilon}_{\text{тол}}}$$

- 2) предел текучести:  $\sigma_T$ , измеренный в

$$\frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2} = 10^7 \text{ Па} .$$



параметр \ $\alpha$	$0^\circ$	$22.5^\circ$	$45^\circ$	$67.5^\circ$	$90^\circ$
$R$	0.279	0.596	0.965	0.644	0.328
$\sigma_T \left( \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2} \right)$	7.27	6.74	6.51	7.10	7.88

Критерий текучести Хилла выглядит следующим образом:

$$H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 2N\sigma_{xy}^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 = 1.$$

В плоском напряжённом состоянии:

$$(G + H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F + H)\sigma_{yy}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1.$$

Задачи:

- 1) Используя экспериментальные данные, определить константы  $F, G, H, N$ .
- 2) По известному критерию текучести, найти зависимость  $R, \sigma_T$  от угла  $\alpha$ .
- 3) Сравнить полученные теоретические значения  $R, \sigma_T$  с экспериментальными:
  1. найти отклонения теоретических значений от экспериментальных (в %)
  2. найти максимальное и среднее отклонения
  3. построить графики теоретических  $R, \sigma_T$  от угла и отметить на них экспериментальные точки.
- 4) Сделать выводы.

## Идентификация и проверка анизотропного критерия текучести Хилла

### №4

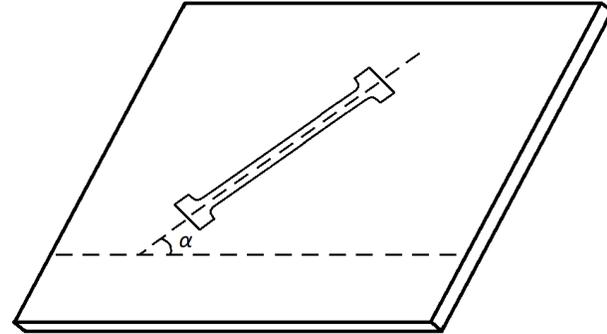
Даны результаты экспериментов на одноосное растяжение образцов, вырезанных из листа алюминиевого сплава АМг6М под различными углами к направлению прокатки. Измерялись 2 параметра:

- 1) отношение деформаций по ширине образца к

деформациям по толщине:  $R = \frac{\dot{\epsilon}_{\text{шир}}}{\dot{\epsilon}_{\text{тол}}}$

- 2) предел текучести:  $\sigma_T$ , измеренный в

$$\frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2} = 10^7 \text{ Па} .$$



параметр \ $\alpha$	$0^\circ$	$22.5^\circ$	$45^\circ$	$67.5^\circ$	$90^\circ$
$R$	0.725	0.773	0.850	0.748	0.653
$\sigma_T \left( \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2} \right)$	17.10	16.65	16.01	16.44	17.12

Критерий текучести Хилла выглядит следующим образом:

$$H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 2N\sigma_{xy}^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 = 1.$$

В плоском напряжённом состоянии:

$$(G + H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F + H)\sigma_{yy}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1.$$

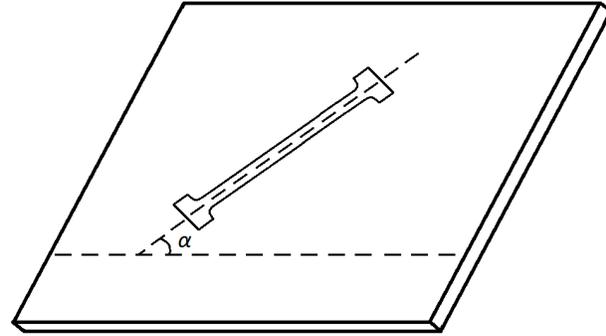
Задачи:

- 1) Используя экспериментальные данные, определить константы  $F, G, H, N$ .
- 2) По известному критерию текучести, найти зависимость  $R, \sigma_T$  от угла  $\alpha$ .
- 3) Сравнить полученные теоретические значения  $R, \sigma_T$  с экспериментальными:
  1. найти отклонения теоретических значений от экспериментальных (в %)
  2. найти максимальное и среднее отклонения
  3. построить графики теоретических  $R, \sigma_T$  от угла и отметить на них экспериментальные точки.
- 4) Сделать выводы.

## Идентификация и проверка анизотропного критерия текучести Хилла №5

Даны результаты экспериментов на одноосное растяжение образцов, вырезанных из отожженного листа латуни Л62 под различными углами к направлению прокатки. Измерялись 2 параметра:

- 1) отношение деформаций по ширине образца к деформациям по толщине:  $R = \frac{\dot{\epsilon}_{\text{шир}}}{\dot{\epsilon}_{\text{тол}}}$
- 2) предел текучести:  $\sigma_T$ , измеренный в  $\frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2} = 10^7 \text{ Па}$ .



параметр \ $\alpha$	$0^\circ$	$22.5^\circ$	$45^\circ$	$67.5^\circ$	$90^\circ$
$R$	0.866	0.918	1.031	0.966	0.808
$\sigma_T \left( \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2} \right)$	11.60	10.78	10.48	11.22	11.18

Критерий текучести Хилла выглядит следующим образом:

$$H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 2N\sigma_{xy}^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 = 1.$$

В плоском напряжённом состоянии:

$$(G + H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F + H)\sigma_{yy}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1.$$

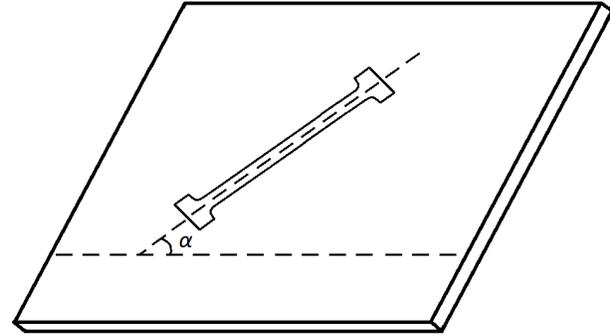
Задачи:

- 1) Используя экспериментальные данные, определить константы  $F, G, H, N$ .
- 2) По известному критерию текучести, найти зависимость  $R, \sigma_T$  от угла  $\alpha$ .
- 3) Сравнить полученные теоретические значения  $R, \sigma_T$  с экспериментальными:
  1. найти отклонения теоретических значений от экспериментальных (в %)
  2. найти максимальное и среднее отклонения
  3. построить графики теоретических  $R, \sigma_T$  от угла и отметить на них экспериментальные точки.
- 4) Сделать выводы.

## Идентификация и проверка анизотропного критерия текучести Хилла №6

Даны результаты экспериментов на одноосное растяжение образцов, вырезанных из листа алюминиевого сплава АА2090-Т3 под различными углами к направлению прокатки. Измерялись 2 параметра:

- 1) отношение деформаций по ширине образца к деформациям по толщине:  $R = \frac{\dot{\epsilon}_{шир}}{\dot{\epsilon}_{тол}}$
- 2) предел текучести:  $\sigma_T$ , в таблице приведен, отнесенный к некоторому значению  $\sigma_0$ .



$\alpha$ параметр	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$R$	0.21	0.33	0.69	1.58	1.03	0.54	0.69
$\frac{\sigma_T}{\sigma_0}$	1	0.96	0.91	0.811	0.81	0.881	0.91

Критерий текучести Хилла выглядит следующим образом:

$$H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 2N\sigma_{xy}^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 = 1.$$

В плоском напряжённом состоянии:

$$(G+H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F+H)\sigma_{yy}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1.$$

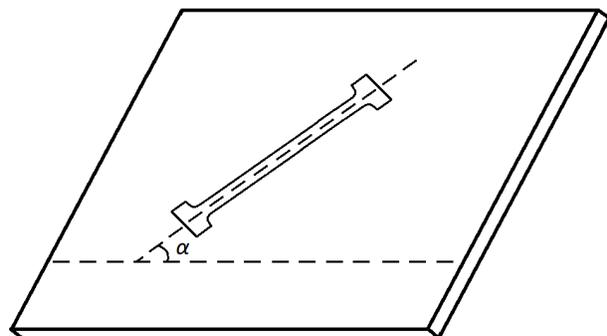
Задачи:

- 1) Используя экспериментальные данные, определить константы  $F, G, H, N$ .
- 2) По известному критерию текучести, найти зависимость  $R, \sigma_T$  от угла  $\alpha$ .
- 3) Сравнить полученные теоретические значения  $R, \sigma_T$  с экспериментальными:
  1. найти отклонения теоретических значений от экспериментальных (в %)
  2. найти максимальное и среднее отклонения
  3. построить графики теоретических  $R, \sigma_T$  от угла и отметить на них экспериментальные точки.
- 4) Сделать выводы.

## Идентификация и проверка анизотропного критерия текучести Хилла №7

Даны результаты экспериментов на одноосное растяжение образцов, вырезанных из листа алюминиевого сплава АА6022-Т4 под различными углами к направлению прокатки. Измерялись 2 параметра:

- 1) отношение деформаций по ширине образца к деформациям по толщине:  $R = \frac{\dot{\epsilon}_{шир}}{\dot{\epsilon}_{тол}}$
- 2) предел текучести:  $\sigma_T$ , в таблице приведен, отнесенный к некоторому значению  $\sigma_0$ .



$\alpha$ параметр	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$R$	0.7	0.7	0.57	0.48	0.48	0.516	0.59
$\frac{\sigma_T}{\sigma_0}$	0.994	0.992	0.982	0.962	0.95	0.952	0.948

Критерий текучести Хилла выглядит следующим образом:

$$H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 2N\sigma_{xy}^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 = 1.$$

В плоском напряжённом состоянии:

$$(G+H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F+H)\sigma_{yy}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1.$$

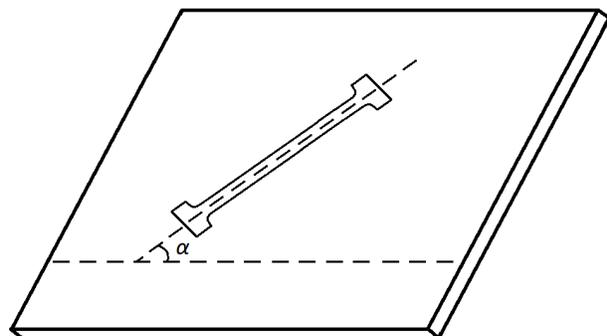
Задачи:

- 1) Используя экспериментальные данные, определить константы  $F, G, H, N$ .
- 2) По известному критерию текучести, найти зависимость  $R, \sigma_T$  от угла  $\alpha$ .
- 3) Сравнить полученные теоретические значения  $R, \sigma_T$  с экспериментальными:
  1. найти отклонения теоретических значений от экспериментальных (в %)
  2. найти максимальное и среднее отклонения
  3. построить графики теоретических  $R, \sigma_T$  от угла и отметить на них экспериментальные точки.
- 4) Сделать выводы.

## Идентификация и проверка анизотропного критерия текучести Хилла №8

Даны результаты экспериментов на одноосное растяжение образцов, вырезанных из листа алюминиевого сплава АА6111-Т4 под различными углами к направлению прокатки. Измерялись 2 параметра:

- 1) отношение деформаций по ширине образца к деформациям по толщине:  $R = \frac{\dot{\epsilon}_{шир}}{\dot{\epsilon}_{тол}}$
- 2) предел текучести:  $\sigma_T$ , в таблице приведен, отнесенный к некоторому значению  $\sigma_0$ .



$\alpha$ параметр	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$R$	0.89	0.89	0.74	0.61	0.61	0.63	0.66
$\frac{\sigma_T}{\sigma_0}$	0.999	0.999	0.98	0.96	0.95	0.95	0.94

Критерий текучести Хилла выглядит следующим образом:

$$H(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + F(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 2N\sigma_{xy}^2 + 2L\sigma_{yz}^2 + 2M\sigma_{xz}^2 = 1.$$

В плоском напряжённом состоянии:

$$(G+H)\sigma_{xx}^2 - 2H\sigma_{xx}\sigma_{yy} + (F+H)\sigma_{yy}^2 + 2N\sigma_{xy}^2 = 1.$$

Задачи:

- 1) Используя экспериментальные данные, определить константы  $F, G, H, N$ .
- 2) По известному критерию текучести, найти зависимость  $R, \sigma_T$  от угла  $\alpha$ .
- 3) Сравнить полученные теоретические значения  $R, \sigma_T$  с экспериментальными:
  1. найти отклонения теоретических значений от экспериментальных (в %)
  2. найти максимальное и среднее отклонения
  3. построить графики теоретических  $R, \sigma_T$  от угла и отметить на них экспериментальные точки.
- 4) Сделать выводы.

